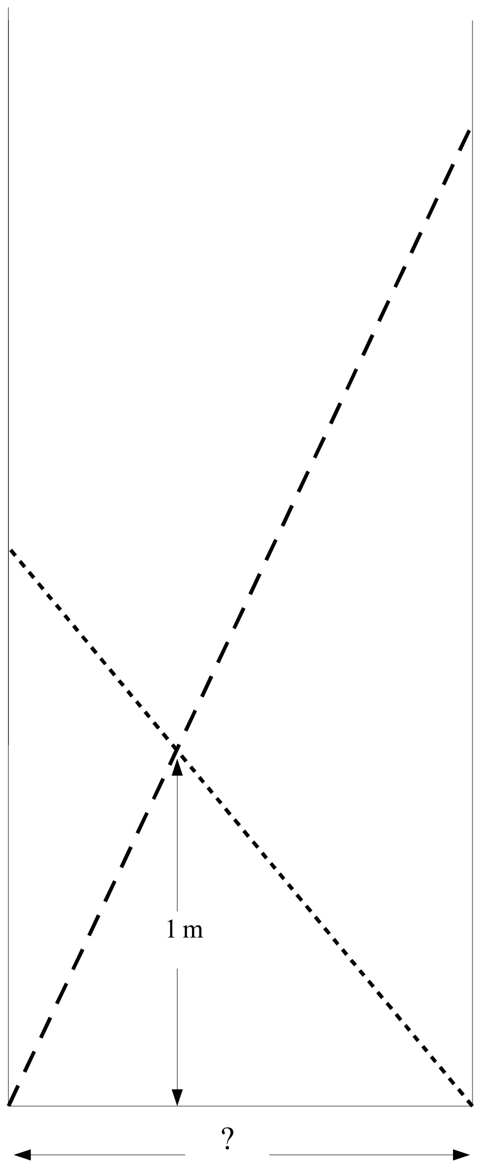
Problème des deux échelles dans un couloir

Énoncé

On dispose de deux échelles : une de deux mètres et l'autre de trois. On pose ces échelles dans un couloir de manière à ce que leurs extrémités à chacune soient en appui sur les murs opposés du couloir et que les échelles se croisent. De plus les pieds des échelles partent du même niveau du couloir.

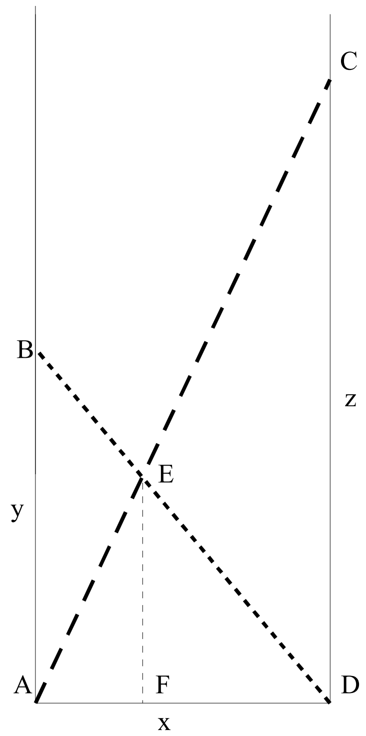
Trouver la largeur que doit avoir le couloir pour que les échelles se croisent à un mètre du sol.



Solution

Pour la démonstration, on utilisera les conventions suivantes:

- l'échelle de trois mètres : AC
- l'échelle de deux mètres : BD
- la hauteur du croisement des échelles : EF
- la largeur du couloir : AD
- la hauteur d'appuie de l'échelle de deux mètres : AB
- la hauteur d'appuie de l'échelle de trois mètres : CD



Les valeurs connues :
AC = 3
BD = 2
EF = 1

Les valeurs inconnues :
AB = y
CD = z
AD = x

Pour le maximum de compréhension, toutes les opérations de simplification des égalités ont été détaillées.

Selon le **théorème de Pythagore** :
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Pour le triangle DAC : $x^2+z^2=3^2$, soit $x^2+z^2=9$ (1)
Pour le triangle ABD : $x^2+y^2=2^2$, soit $x^2+y^2=4$ (2)

On en déduit, par soustraction de (1) par (2) : $z^2-y^2=5$ (3)

Selon le **théorème de Thalès** (voir en dernière page), avec les parallèles (AB), (EF) et (CD) :

$$\frac{EF}{AB}=\frac{AF}{AD} \quad \text{et} \quad \frac{EF}{CD}=\frac{FD}{AD} \quad \text{, soit} \quad \frac{EF}{y}=\frac{AF}{AD} \quad \text{et} \quad \frac{EF}{z}=\frac{FD}{AD}$$

comme EF = 1 :

$$\frac{1}{y}=\frac{AF}{AD} \quad (4) \text{ et } \quad \frac{1}{z}=\frac{FD}{AD} \quad (5)$$

On en déduit, par addition de (4) et (5) :

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{AF}{AD}+\frac{FD}{AD} \quad \text{, soit :} \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{AF+FD}{AD}$$

On peut noter que : $AF+FD=AD$

Donc : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{AD}{AD}$ ou encore : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

On en déduit : $\frac{1}{y}=1-\frac{1}{z}$, soit $\frac{1}{y}=\frac{z}{z}-\frac{1}{z}$, ou $\frac{1}{y}=\frac{z-1}{z}$, ou encore $y=\frac{z}{z-1}$

avec (3) $z^2-y^2=5$, on trouve $z^2-\left(\frac{z}{z-1}\right)^2=5$ ou $z^2-\frac{z^2}{(z-1)^2}=5$

soit $z^2(z-1)^2-\frac{z^2(z-1)^2}{(z-1)^2}=5(z-1)^2$, ou encore $z^2(z-1)^2-z^2=5(z-1)^2$

puis par simplifications successives :

$$z^2(z^2-2z+1)-z^2=5(z^2-2z+1)$$

$$z^4-2z^3+z^2-z^2=5z^2-10z+5$$

$$z^4-2z^3-5z^2+10z-5=0$$

par approximation, nous trouvons : **z = 2,73572327666985,**

nous retiendrons : z = 2,736

En reprenant (1) $x^2+z^2=9$, $x^2=9-z^2$, $x=\sqrt{9-z^2}$, $x=\sqrt{9-(2,736)^2}$, $x=\sqrt{9-7,485696}$, $x=\sqrt{1,514304}$, nous trouvons : x = 1,230570599

Soit la largeur du couloir : **1,231 mètre**

* * * Fin de la démonstration * * *

Théorème de Thalès : le rapport de la plus petite mesure sur la plus grande pour chacun des deux segments des deux droites sécantes et le rapport de la plus petite mesure sur la plus grande pour les segments qui représentent les droites parallèles sont égaux.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$